

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀԱՅԿ ՈՒՐԵՆԻ ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԱՆԵՐԸ ԲՐԱՆԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա.04.02 «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2006

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МКРТЧЯН ГАЙК РУБЕНОВИЧ

СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ БРАН

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.04.02 – “Теоретическая физика”

ЕРЕВАН – 2006

Ատենախոսության բեման հաստատվել է Երևանի ֆիզիկայի Ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ-մաթ գիտ. դոկտոր
Ռ.Պ Մանվելյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ Ֆիզ-մաթ գիտ. բեկնածու Ի.Բանդոս
Ֆիզ-մաթ գիտ. դոկտոր Ռ.Պողոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը տեղի կունենա 2006թ հունիսի 20 -ին, ժամը 14.00 -ին
Երևանի ֆիզիկայի Ինստիտուտում գործող ԲՈՒՀ-ի 024 մասնագիտական խորհրդի նիստում:

Հասցեն՝ 375036, Երևան, Ալիխանյան եղբայրների փող. 2

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵրՖԻ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2006թ. մայիսի 19-ին:

Մասնագիտական խորհրդի Գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ գիտ. բեկնածու  Ա.Մարգարյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском физическом институте.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Р. П. Манвелян

Официальные оппоненты: кандидат физ.-мат. наук И.Бандос
доктор физ.-мат. наук Р.Погосян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита состоится 20 июня 2006г. в 14⁰⁰ часов,
на заседании специализированного совета ВАК 024, действующая при Ереванском
физическом институте им. Алиханяна, по адресу: 375036, ул. Бр. Алиханян, 2., г. Ереван.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрФИ.

Автореферат разослан 19 мая 2006г.

Ученый секретарь специализированного совета
кандидат физ.-мат. наук  А.Маргарян

Общая характеристика работы

Актуальность темы:

Термин «теория бран» в названии диссертации означает произвольные теории, в спектре которых присутствуют протяженные объекты – струны, мембраны, р-браны, Dp-браны. В число таких теорий входят теории супергравитации в различных размерностях, (супер)струны, М-теория. Характеристическим свойством таких теорий является изменение алгебры пространственно-временных симметрий – алгебры Пуанкаре, если речь идет о плоском пространстве-времени. Новая алгебра («тензорная алгебра Пуанкаре») содержит наряду с генераторами пространственно-временных трансляций новые генераторы, историческое название которых - «тензорные центральные заряды», и которые входят в алгебру так же, как генераторы трансляций, т.е. алгебра есть полупрямое произведение алгебры вращений (Лоренца) M и абелевой подалгебры T нескольких антисимметричных тензоров, включая вектор, т.е. обычный вектор энергии-импульса.

$$M \otimes, T \quad (1)$$
$$T = \{P_\mu, Z_{\mu\nu}, \dots\}$$

Пространственно-временные симметрии теории, наряду с этими генераторами, могут включать дополнительные: суперсимметрии (суперзаряды) - в суперсимметричных теориях, а также дополнительные бозонные генераторы, расширяющие группу симметрий до OSp , E_n и т.д. Мы ограничимся рассмотрением указанного выше полупрямого произведения группы Лоренца с абелевой подалгеброй центральных зарядов (а также соответствующей алгебры суперсимметрий), т.к. большинство теорий в явном виде инвариантны именно по отношению к таким (супер)алгебрам. Впервые появление тензорных центральных зарядов было отмечено в работе [1], где был вычислен коммутатор центральных зарядов в присутствии бран, и он оказался равным сумме членов с вектором импульса и новых, пропорциональных тензорным зарядам.

Теории бран являются основным объектом нашего исследования, основанном на подходе с точки зрения алгебры симметрии, т.е. нас интересует какие выводы могут быть сделаны непосредственно из изучения алгебры пространственно-временных симметрий теории. Это, в первую очередь, выявление (супер)мультиплетов, из которых состоит спектр соответствующих теорий, если симметрии не нарушены спонтанно. Построение супермультиплетов теории с тензорными зарядами (1) основывается на основополагающей работе Вигнера [2], где впервые был развит метод индуцированных представлений полупрямых произведений групп. Метод предполагает выбор (и, по возможности, классификации) орбиты группы Лоренца на пространстве зарядов, вычисление группы стабильности (малой группы) данной орбиты, выбор представления малой группы, вычисление представления ненулевых суперзарядов для данной орбиты, и, в результате, получение всех членов супермультиплета и их представлений по отношению к малой группе (т.е.

спинов, в случае обычной группы Пуанкаре). Эта программа проведена в диссертации для значительного числа теорий и их орбит. Среди них: преонные [3] орбиты $N=1$ суперсимметричных теорий, орбиты старшего ранга $N=1$ 10D теории и другие.

Наличие бран в теориях суперструн позволило обосновать важнейшее свойство этих теорий – т.н. дуальность. В 80-х годах было найдено, что есть пять непротиворечивых (anomaly-free) теорий суперструн, и в 90-х оказалось, что они связаны друг с другом дискретными преобразованиями дуальности. Более того, они, по всей видимости, связаны с т.н. М-теорией – гипотетической 11-мерной теорией, для которой аналог предела нулевого наклона суперструн дает 11-мерную супергравитацию – теорию, которая является максимально расширенной супергравитацией, компактификация которой приводит к 10-мерной IIA супергравитации. Свойства М-теории остаются во многом неизвестными (а М часто интерпретируется как Magic – волшебный, таинственный), вплоть до самой формулировки теории. Более всего известны ее свойства при компактификациях на различные многообразия и размерности. Одно из таких свойств, известное уже несколько десятилетий (т.к. оно связано лишь с ее супергравитационным пределом) – это инвариантность компактифицированных супергравитаций по отношению к непрерывным группам E_n , впервые найденное в [3] как E_7 инвариантность уравнений движения 4D $N=8$ супергравитации. Эта инвариантность включает преобразования, которые, учитывая струнное происхождение соответствующих полей, связывали бы пределы сильной и слабой связи IIA суперструны. Эта гипотетическая для струны симметрия получила название S-дуальности и сейчас уже считается достаточно обоснованной. Полный набор всех дуальностей известен как U-дуальность. U-дуальность – одно из важнейших свойств компактифицированных теорий суперструн/М-теории, однако до недавнего времени считалось, что она появляется в явном виде только после компактификации. В работе Веста [4] была предложена гипотеза о том, что U-дуальность является симметрией некомпактифицированной М-теории, либо, точнее сказать, существует формулировка М-теории, где U-дуальность присутствует явно и является алгеброй Каца-Муди E_{11} , диаграмма Дынкина которой представлена на рис.1. Замечательно, что несмотря на скудную информацию об М-теории, оказалось возможным установить свойства U-дуальности как группы симметрии, в частности, вывести непосредственно наличие и структуру диаграммы Дынкина E_n групп симметрии. Обобщение этого вывода согласуется с гипотезой об E_{11} симметрии М-теории. Рассмотрение этой гипотезы позволяет обобщить ее до гипотезы о существовании некоего класса теорий, не всегда даже суперсимметричных, связанных с т.н. очень расширенными лоренцевскими алгебрами Каца-Муди, G^{+++} где G – одна из классических алгебр Ли. Установлены многообразные связи между свойствами этих алгебр и определенными теориями (супер)гравитации. В двух «крайних» случаях это связь между $E_8^{+++} = E_{11}$ и 11D супергравитацией и М-теорией, и связь между

A_{n-3}^{+++} и n -мерной гравитацией. Лагранжианы G^{+++} теорий предполагаются в виде сигма-моделей, либо одномерных, либо бесконечномерных, что связано с тем, что обычное пространство-время является лишь частью пространства всех центральных зарядов, как это имеет место во всех теориях бран. Бесконечномерность в данном случае связана с требованием инвариантности по отношению к алгебре Каца-Муди, чьи представления бесконечномерны. В диссертации рассмотрены несколько проблем, возникающих в G^{+++} моделях. Рассмотрена орбита, соответствующая частице (т.е. включающую точку, где отличен от нуля только вектор энергии-импульса) и найдена соответствующая малая группа, что в дальнейшем, после нахождения суперсимметричного расширения рассматриваемых теорий, позволит построить соответствующий супермультиплет. Проблема суперсимметричного расширения рассмотрена в диссертации для разложения по первым уровням относительно одного из корней алгебры и показано, что в этом приближении она имеет решение.

Цель и задачи работы:

Целью является изучение свойств теорий бран, непосредственно следующих из алгебры пространственно-временных, либо объединенных пространственно-временных и внутренних, симметрий:

- Систематическое построение унитарных неприводимых представлений тензорной группы Пуанкаре для минимальной алгебры суперсимметрии в пространственно-временных размерностях от (1+1) до (10+2) для случая преонных орбит.
- Построение супермультиплетов для $D=9+1$ $N=1$ супералгебры с тензорными зарядами для произвольной орбиты ранга 2, для класса безмассовых орбит общего вида, а также для некоторых массивных орбит.
- Вычисление действия малой группы на ненулевые заряды и идентификация представления тензорной группы Пуанкаре на бозонных и фермионных членах супермультиплета.
- Изучение некоторых свойств E_n теорий, как-то: изучение представления E_{11} , соответствующего орбите частицы, построение Z_2 орбифолдов алгебры Каца-Муди E_n , проверка непротиворечивости предполагаемого соотношения суперсимметрии в E_{11} теории по отношению к подгруппе $SO(10,10)$ на первых нескольких уровнях.

Объект исследования:

Это теории бран в широком смысле – все теории, имеющие центральные заряды в бозонной части алгебры пространственно-временных симметрий. Сюда входят теории супергравитаций в различных размерностях, суперструны/M-теория, а также современные теории основанные на гиперболических и лоренцевых (соответственно расширенных и очень расширенных) алгебрах Каца-Мууди.

Методы исследования:

Методы теории поля, теории (супер)групп и алгебр Ли.

Научная новизна:

Все выносимые на защиту результаты получены впервые.

- Впервые проведен систематический расчет малых групп преонных орбит в пространственно-временных размерностях от $(1+1)$ до $(10+2)$ и построены соответствующие унитарные представления тензорной группы Пуанкаре.
- Впервые вычислены малые группы для произвольной орбиты ранга 2 для $D=9+1$ $N=1$ супералгебры с тензорными зарядами. Для той же супералгебры определена безмассовая орбита общего вида и для нее вычислены все возможные малые группы, а также вычислены малые группы для некоторых массовых орбит.
- Впервые, для указанных выше случаев, построены супермультиплеты соответствующих алгебр суперсимметрии, вычислено действие малой группы на ненулевые суперзаряды, и показано, что во многих случаях, в частности, в простейшем преонном случае, фермионные и бозонные члены супермультиплета находятся в одном и том же представлении тензорной группы Пуанкаре.
- Впервые вычислена малая группа орбиты частицы в E_{11} теории.
- Рассмотрены Z_2 орбифолды E_n теорий и впервые показано, что они совпадают с алгеброй $D_8^{(1)}$ ($n=9$), что ее корни совпадают с корнями группы DE_{10} ($n=10$) и EE_{11} ($n=11$), в последнем случае полное доказательство отсутствует, гипотеза проверена на компьютере до уровня 148.
- Рассмотрено разложение предполагаемого соотношения суперсимметрии в E_{11} теории по отношению к подгруппе $SO(10,10)$ и показано, что представления, появляющиеся в разложении правой части рассматриваемого соотношения, позволяют представить их в искомом виде симметричного квадрата определенного представления максимальной компактной подгруппы $SO(10) \times SO(10)$

Практическая значимость полученных результатов:

Результаты данной диссертационной работы могут быть использованы в нескольких областях теоретической физики. Они необходимы для разложения представлений по отношению к подалгебрам (\mathfrak{g}) , в частности по отношению к чистым Пуанкаре подалгебрам, что позволяет интерпретировать полученные мультиплеты в терминах обычных полей, как это имеет место для тензорной частицы. Другое возможное применение результатов данной диссертационной работы в теоретико-полевом подходе к тензорной алгебре Пуанкаре, который начинается с построения унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре, для их дальнейшего представления в виде дифференциальных уравнений на релятивистские поля. Применение результатов настоящей работы возможно для выявления связи между представлениями супералгебры $Osp(1|n)$, в частности, синглтонного представления, с представлениями тензорного Пуанкаре. Эта связь, видимо, дает возможность различать члены преонного супермультиплета, т.к. два различных синглтонных представления, составляющих супермультиплет $Osp(1|n)$, будут соответствовать фермионному и бозонному членам преонного супермультиплета, восстанавливая связь спин-статистика. Представляет интерес также обобщение преонной конфигурации на полный E_{11} ковариантный набор тензорных зарядов и соответствующее обобщение представленных в настоящей работе результатов.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Вычислены малые группы преонных орбит в пространственно-временных размерностях от $(1+1)$ до $(10+2)$ и построены соответствующие унитарные представления тензорной группы Пуанкаре.
2. Для $D=9+1$ $N=1$ супералгебры с тензорными зарядами рассмотрены орбиты ранга >1 , вычислены малые группы для произвольной орбиты ранга 2.
3. Для $D=9+1$ $N=1$ супералгебры с тензорными зарядами определена безмассовая орбита общего вида и для нее вычислены малые группы, для этого же случая вычислены малые группы некоторых массивных орбит.
4. Для всех указанных выше случаев построены супермультиплеты соответствующих алгебр суперсимметрии, вычислено действие малой группы на ненулевые суперзаряды, и показано, что во многих случаях, в частности в простейшем преонном случае, фермионные и бозонные члены супермультиплета находятся в одном и том же представлении тензорной группы Пуанкаре.
5. Вычислена малая группа орбиты частицы в E_{11} теории.

6. Рассмотрены Z_2 орбиформы E_n теорий и показано, что они совпадают с алгеброй $D_8^{(1)}$ ($n=9$), что ее корни совпадают с корнями группы DE_{10} ($n=10$) и EE_{11} ($n=11$), в последнем случае полное доказательство отсутствует, гипотеза проверена на компьютере до уровня 148.
7. Рассмотрено разложение предполагаемого соотношения суперсимметрии в E_{11} теории по отношению к подгруппе $SO(10,10)$ и показано, что представления, появляющиеся в разложении правой части рассматриваемого соотношения, позволяют представить их в искомом виде симметричного квадрата определенного представления максимальной компактной подгруппы $SO(10) \times SO(10)$.

Апробация полученных результатов:

Результаты работ доложены на семинарах в ЕрФИ, Университете «Тор Вергата» (Рим), конференции молодых ученых (Ереван, 2003), конференции по теоретической физике посвященная семидесятилетию Теоретического отдела, Институт имени Лебедева, Москва, Апрель 11-16, 2005

Публикации:

По теме диссертации опубликованы 4 статьи и один абстракт в трудах конференции по теоретической физике.

Структура и объем работы:

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, всего 103-и страниц печатного текста, 83-и ссылки и 18-и рисунков.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель работы и научная новизна полученных результатов. Изложены практическая ценность работы, краткое содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту.

В главе 1 рассмотрены унитарные представления групп полупрямых произведений в теориях супергравитации. Глава состоит из трех параграфов.

В параграфе 1.1 описан метод индуцированных представлений, созданный Вигнером для построения представлений группы Пуанкаре [2]. Описаны использованные обозначения для гамма матриц, метод рекурсивного подсчета гамма матриц в различных размерностях и с различным количеством временных

компонент. Также описан метод практического расчета малых групп для тензорных групп Пуанкаре в различных размерностях.

В параграфе 1.2 вычислены малые группы преонных орбит в различных размерностях, подсчитано количество инвариантов, которые различают орбиты, в некоторых случаях даны явные выражения для инвариантов. Для каждой малой группы описаны вложения в группу симметрии, которая является произведением группы Лоренца на R симметрию (если она существует).

В параграфе 1.3 перечислены минимальные алгебры суперсимметрии в размерностях 2-12 с одной и двумя времениподобными координатами, а также построены малые группы преонов для всех этих случаев и подсчитано количество инвариантов, различающих орбиты.

В главе 2 рассмотрены 10D, N=1 BPS супермультиплеты. Супермультиплеты для безмассового случая получены полностью, для массивного случая выделен класс конфигураций которые характеризуются минимальным количеством ненулевых инвариантов и вычислены соответствующие малые группы.

В параграфе 2.1 дано определение класса «безмассовых» BPS супермультиплетов которое характеризуется присутствием подгруппы T_8 (группа 8-мерных трансляций) в соответствующей малой группе. Для расчета малой группы первоначальная матрица Z отвечающая за данную конфигурацию преобразована с помощью преобразования триальности и задача сведена к нахождению малой группы симметричного тензора второго ранга индексы которого находятся в векторном представлении группы $SO(8)$. Показано что малая группа имеет вид: $T_8 \times SO(k_1) \times SO(k_2) \dots \times SO(k_n)$, где k_n это количество совпадающих собственных значений матрицы. Для описания вложения малой группы в общую группу симметрии проведено обратное преобразование триальности и показаны вложения для некоторых основных случаев.

В параграфе 2.2 построены супермультиплеты для основных случаев рассмотренных в предыдущем параграфе. Показано, что могут существовать супермультиплеты, в которых фермионы и бозоны принадлежат одному и тому же представлению тензорной группы Пуанкаре.

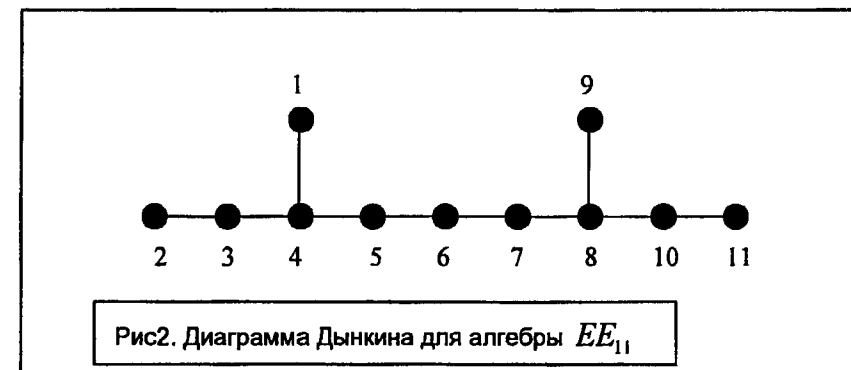
В параграфе 2.3 представлена полная классификация малых групп для случая rank Z=2, что соответствует коэффициенту 14/16 «выживших» суперсимметрий. (Для случая преонов этот коэффициент равен 15/16.)

В параграфе 2.4 рассмотрены некоторые дополнительные массивные конфигурации, не принадлежащие классу конфигураций, выделенных в параграфе 2.2 и построены соответствующие малые группы.

В главе 3 представлены некоторые результаты связанные с гипотезой E_{11} . Глава состоит из 5-и параграфов.

В параграфе 3.1 описан общий метод построения корней для алгебр Каца-Муди основанный на [7]. Для этого была разработана программа на С++, которая позволяет вычислять корни алгебры Каца-Муди с данной диаграммой Дынкина до заданного уровня, генерирует диаграмму Дынкина для Z_2 градуированной подалгебры и для любой алгебры Каца-Муди и подалгебры, заданной в базисе исходной алгебры, проверяет совпадение корней на уровнях, где обе алгебры имеют корни.

В параграфе 3.2 рассмотрены Z_2 -инвариантные подалгебры алгебры Каца-Муди (орбифолды). Для конечномерных полупростых алгебр Ли, в случаях, когда ранг инвариантной подалгебры равен рангу общей алгебры, эта подалгебра оказывается равной максимальной компактной подалгебре, т.е. подалгебре, инвариантной относительно инволюции Шевалле. Для алгебры E_{11} была построена подалгебра Каца-Муди где в качестве простых взяты первые 11 четных корней алгебры, мы обозначаем эту подалгебру EE_{11} . Хотя нами не доказано алгебраически, что алгебра EE_{11} совпадает с $Z_2(E_{11})$, нам удалось проверить эту гипотезу до уровня 148. Т.к. количество корней до этого уровня равно 19661788, то совпадение существенное. Диаграмма Дынкина алгебры EE_{11} приведена на рис 2. Гипотеза о совпадении корней Z_2 -инвариантной подалгебры с корнями определенной алгебры Каца-Муди была доказана алгебраически для алгебр E_{10} и E_9 , соответствующие алгебры оказались равны DE_{10} и $D_8^{(1)}$, соответственно. Их диаграммы приведены на рис.3 и рис.4.



В параграфе 3.3 сделана попытка провести проверку предполагаемого уравнения суперсимметрии, именно, ставится вопрос существования "квадратного корня" первого фундаментального представления E_{11} . Проверка основана на разложении L_1 (первого фундаментального представления E_{11}) по степеням корня e_{11} (рис1.). Показано что часть представлений на первых трех уровнях может быть получена как симметричный квадрат определенного представления соответствующей компактной подгруппы $SO(10) \times SO(10)$.

Параграф 3.4 посвящен гипотезе о том, что группа симметрии E_{11} должна быть расширена до полупрямого произведения L_1 и E_{11} , что естественным образом обобщает группу Пуанкаре. Рассмотрена малая группа для орбиты частицы, что означает наличие на орбите точки, где все заряды равны нулю, кроме векторного. Соответствующий стабилизатор (малая группа) имеет явное описание на языке корней алгебры E_{11} . Данные результаты позволяют рассмотреть всех представлений "частиц" указанной обобщенной Пуанкаре.

В параграфе 3.5 рассмотрены фундаментальные представления алгебр E_{11} и EE_{11} . Показано, что один из фундаментальных весов EE_{11} совпадает с фундаментальным весом L_1 алгебры E_{11} , который содержит все бранные заряды 11D алгебры суперсимметрии. Этот результат может иметь связь с предполагаемым соотношением суперсимметрии в E_{11} подходе.

В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможное развитие.

Выводы

Подход, основанный на изучении алгебр симметрии, позволяет получить непертурбативную информацию о теориях бран, в частности, изучить структуру (супер)мультиплетов для различных теорий, а также возможный вид соотношения суперсимметрии для моделей с явной дуальной инвариантностью.

Литература

1. J.A.de Azcarraga, J.P.Gauntlett, J.M.Izquierdo and P.K.Townsend, *Phys.Rev.Lett.* 63 p2443, (1989).
2. E. Wigner, *Ann. Math.*40, p149 (1939)
3. I. Bandos and J. Lukierski, *Mod.Phys.Lett.* A14 1257, (1999) , hep-th/9811022; Igor A. Bandos, Jose A. de Azcarraga, Jose M. Izquierdo and Jerzy Lukierski, *Phys.Rev.Lett.* 86 (2001) 4451-4454, hep-th/0101113
4. P.West, *Class.Quant.Grav.* 18 (2001) pp4443-4460, hep-th/0104081.
5. E.Cremmer and B.Julia, *Nucl.Phys.* B159, 1979, p141.
6. R. Mkrtychan, *Phys.Lett.* B558, 2003, pp205-212, hep-th/0212174.
7. V.G.Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1995.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Г.Р.Мкртчян, Малые Группы Бран в $(1+9)D$, Известия НАН Армении, Физика, т. 41, н. 2, с. 83-86 (2006)
2. H. Mkrtychan and R. Mkrtychan, Remarks on E11 Approach, *Mod.Phys.Lett.* A21 (2006) pp 503-514
3. H. Mkrtychan and R. Mkrtychan, 10D N=1 Massless BPS Supermultiplets, *Mod.Phys.Lett. A*, Vol. 19, No. 12, pp 931-943, (2004)
4. H. Mkrtychan and R. Mkrtychan, Little Groups of Preon Branes, *Mod.Phys.Lett.A*, Vol 18, No. 37, pp 2665-2672 (2003)
5. H.Mkrtychan and R. Mkrtychan, On A E11 Hypothesis, International Conference on Theoretical Physics devoted to 70 years of theoretical division, Abstracts, April 11-16, Moscow, Lebedev Institute, p23

ՍԻՄԵՏՐԻԱՆԵՐԸ ԲՐԱՆԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունը նվիրված է սուպերսիմետրիկ տեսությունների հատկությունների հետազոտմանը՝ ելնելով նրանց համապատասխանող սիմետրիայի հանրահաշվից:

Ստացված են հետևյալ արդյունքները՝

- Հաշվարկված են պրեոնային օրբիտաների փոքր խմբերը $(1+1) - (10+2)$ տարածաժամանակային չափողականություններում և կառուցված են համապատասխան թենզորային Պուանկարե խմբի ունիտար ներկայացումները:
- Դիտարկված են ռանգ > 1 օրբիտաները, $D=9+1$, $N=1$ թենզորային լիցքերով սուպերհանրահաշվի համար, հաշվարկված են փոքր խմբերը բոլոր օրբիտաների համար, որոնց ռանգը երկուս է:
- Թենզորային լիցքերով $D=9+1$ $N=1$ սուպերհանրահաշվի համար սահմանված է ընդհանուր տեսքի անգանգված օրբիտա և այդ դեպքի համար կառուցված են փոքր խմբերը: Նույն դեպքի համար հաշվարկված են որոշ զանգվածային դեպքերի փոքր խմբերը:
- Բոլոր վերոհիշյալ դեպքերի համար կառուցված են համապատասխան սուպերսիմետրիայի հանրահաշվերի սուպերմուլտիպլետները, հաշվարկված է փոքր խմբի ազդեցությունը ոչ զրոյական լիցքերի վրա և ցույց է տրված, որ շատ դեպքերում, մասնավորապես՝ պարզագույն պրեոնային դեպքի համար, բոզոնային և ֆերմիոնային սուպերմուլտիպլետի անդամները գտնվում են թենզորային Պուանկարե խմբի նույն ներկայացման մեջ:
- Հաշվարկված է մասնիկի օրբիտայի փոքր խումբը E_{11} տեսության մեջ:
- Դիտարկված են E_n տեսության Z_2 օրբիֆոլդները և ցույց է տրված, որ դրանք համընկնում են $D_8^{(1)}$ խմբի հետ ($n=9$ դեպքում), որ այդ խմբի արմատները համընկնում են DE_{10} ($n=10$) և EE_{11} ($n=11$) խմբերի արմատների հետ, վերջին դեպքի համար լրիվ ապացույցը բացակայում է: Վարկածը ստուգված է համակարգչի օգնությամբ մինչև 148 մակարդակի արմատները:

- Դիտարկված է E_{11} հիպոթեզին համապատասխանող սուպերսիմետրիայի հանրահաշվի վերածումը ըստ $SO(10,10)$ ենթախմբի և ցույց է տրված որ դիտարկվող սուպերսիմետրիայի հանրահաշվի հարաբերության աջ մասի վերածման մեջ առաջացող ենթախմբերը կարող են ներկայացված լինել փնտրվող մաքսիմալ կոմպակտ $SO(10) \times SO(10)$ ենթախմբի որոշակի ներկայացման սիմետրիկ քառակուսու տեսքով